Государственное бюджетное образовательное учреждение
среднего профессионального образования
Губернский колледж города Похвистнево

Методические указания по выполнению самостоятельных работ по учебной дисциплине Математика для студентов специальности 190631 Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта

Рассмотрено и одобрено ПЦК математических и
естественнонаучных дисциплин в качестве учебного пособия
для студентов среднего профессионального образования
Протокол №2 от 11 октября 2013 года

Похвистнево, 2013

Содержание

Пояснительная записка

Методические указания по выполнению самостоятельных работ предназначены для использования в учебном процессе студентами очной формы обучения по дисциплине «Математика» специальности *190631 Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта;* включают разделы: математический анализ, основы теории вероятностей и математической статистики.

Целью методических указаний является формирование системы базовых знаний по данной дисциплине, которая позволит будущим специалистам решать в своей повседневной деятельности актуальные задачи практики, понимать написанные на современном научном уровне результаты других исследований и тем самым совершенствовать свои профессиональные навыки.

Основными задачами являются:

- ознакомление студентов с ролью математики в современной жизни, с характерными чертами математического метода изучения реальных задач;
- обучение студентов теоретическим основам курса;
- привитие практических навыков математического моделирования реальных задач с использованием математического аппарата данного курса;
- развитие у студентов навыков творческого и логического мышления, повышение общего уровня математической культуры.

В результате изучения данной дисциплины студент должен:

- знать теоретические основы дифференциального и интегрального исчислений, дифференциальных уравнений, числовых и функциональных рядов, теории вероятностей и математической статистики;
- уметь использовать полученные знания для решения практических задач.

Существенное значение при изучении математического анализа имеет самостоятельная работа студентов. В рамках самостоятельной работы, в обязательном порядке, студенты очной формы обучения выполняют типовые расчёты согласно графику, содержащемуся в рабочей программе по дисциплине. Правильное и своевременное выполнение типовых расчётов является необходимым условием для допуска студента к экзамену.

Самостоятельная работа способствует укреплению связи учебного процесса с научно-исследовательской деятельностью, является необходимым средством целенаправленности профессиональной подготовки студента. Самостоятельная работа способствует систематизации, закреплению и расширению теоретических знаний, формирует у студента умения и навыки самостоятельного анализа.

В процессе изучения данной дисциплины студенты должны сначала изучить теоретический материал и выработать навыки решения типовых задач, используя рекомендованную литературу, а затем выполнить задания своего варианта.

При выполнении работы необходимо придерживаться указанных ниже правил:

1. Самостоятельная работа должна быть выполнена студентом в отдельной ученической тетради с полями не менее 3 см для замечаний преподавателя.

2. На обложке тетради указываются: название дисциплины; номер варианта и номера решаемых задач; Ф.И.О. студента, выполнившего работу, его номер группы; Ф.И.О. преподавателя, проверяющего работу.

3. Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы или указывается преподавателем.

4. Условия задач переписываются полностью, без сокращения слов, после чего приводится их подробное решение. В конце решения приводится ответ.

5. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по порядку номеров. Работы, содержащие не все задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

6. Если в работе имеются ошибки, студент должен выполнить все требования преподавателя, изложенные в рецензии, и сдать работу с исправлениями на повторную проверку.

7. Никакие исправления в тексте уже проверенной работы не допускаются, все исправления записываются после рецензии преподавателя с указанием номера задачи, к которой относятся дополнения и исправления.

8. Работа может быть выполнена заново в случае выявления серьёзных замечаний и ошибок.

9. В конце тетради рекомендуется оставлять несколько чистых страниц для дополнений и исправлений.

После проверки самостоятельная работа предъявляется к защите. На защите студент должен показать свое умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

Оценки **«отлично»** заслуживает студент, который всесторонне и глубоко раскрыл содержание поставленных задач, показал взаимосвязь теории с практикой, продемонстрировал умение работать с литературой, делать теоретические и практические выводы. При этом должны быть полностью освещены теоретические вопросы и верно решены практические задания.

Оценки **«хорошо»** заслуживает студент, который обстоятельно владеет материалом, однако не на все вопросы дает глубокие исчерпывающие и аргументированные ответы. При этом должен быть полностью и верно решены практические задания.

Оценки **«удовлетворительно»** заслуживает студент, который в основном владеет материалом, однако поверхностно отвечает на вопросы, допускает существенные неточности. Ответы не отличаются ясностью и глубиной. При этом должен быть полностью и верно решено практическое задание.

Оценки **«неудовлетворительно»** заслуживает студент в том случае, когда не может ответить на вопросы рецензента, не владеет материалом работы, не в состоянии дать объяснения решению задач, работа оформлена крайне неряшливо. При этом, независимо от правильности ответа на теоретические вопросы, если не решены практические задания, студенту также выставляется оценка **«неудовлетворительно»**. В этом случае студенту предстоит повторная защита.

Защита и оценка работы - это подведение итогов самостоятельной работы студента и получение права допуска к зачету.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа студентов предполагает изучение теоретического материала и выполнение практических заданий.

Тема 1. Исследование функции на непрерывность.

Цель: Овладение практическими навыками определения непрерывности функции в точке и установления характера разрыва функции.

Определения непрерывности функции в точке. Понятие непрерывности справа и слева. Непрерывность элементарных функций. Точки разрыва функции, их классификация. Непрерывность функции на множестве. Основные свойства функций, непрерывных на отрезке.

Литература: **[2]** –С.59-67; **[4]** – С.142-143; **[7]** – С.45-59.

Пример выполнения задания. Определить точки разрыва функции и исследовать их характер.

а) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$; б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x\le 1,\\ 2^x, & x>1.\end{cases}$

Решение.

а) Функция $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ не определена в точке $x=1$, следовательно, она не является непрерывной в этой точке. Так как

$$\lim_{x-1-0}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2,$$

то $x=1$ - точка устранимого разрыва первого рода. Данную функцию можно доопределить по непрерывности при $x=1$, взяв за значение функции в этой точке величину односторонних пределов:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{если } x\ne 1\\ 2, & \text{если } x=1.\end{cases}$$

б) Функция $y=\dfrac{1}{x+1}$ определена и непрерывна на множестве $(-\infty,-1)\cup(-1,1]$, так как в точке $x=-1$ знаменатель обращается в нуль. Вычислим односторонние пределы в точке $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{1}{x+1}=\left(\frac{1}{-0}\right)=-\infty;\ \lim_{x\to -1+0}\frac{1}{x+1}=\left(\frac{1}{+0}\right)=+\infty.$$

Так как оба односторонних предела в точке $x=-1$ бесконечны, то $x=-1$ является точкой разрыва второго рода.

Функция $y=2^x$ при $x>1$ определена и непрерывна. Функция $y=f(x)$ определена в точке $x=1$, $f(1)=\frac{1}{2}$. Вычислим односторонние пределы в точке $x=1$:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2};\quad \lim_{x\to 1+0}2^x=2.$$

Односторонние пределы функция $y=f(x)$ в точке $x=1$ конечны, но не равны между собой. Следовательно, точка $x=1$ является точкой разрыва первого рода. Скачок функции в этой точке равен $f(1+0)-f(1-0)=2-\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$.

Задание. Определить точки разрыва функции и исследовать характер точек разрыва:

1.1. а) $f(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}$; б) $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0,\\ 2x-1, & x>0\end{cases}$

1.2. а) $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x^3}$; б) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0,\\ 1-x, & 0<x\le 1,\\ \dfrac{1}{1-x}, & x>1\end{cases}$

1.3. а) $f(x)=\dfrac{1-x}{(1+x)^2}$; б) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 2,\\ \dfrac{1}{2}, & x>2\end{cases}$

1.4. а) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$; б) $f(x)=\begin{cases} -x, & x<0,\\ tgx, & 0\le x<\dfrac{\pi}{4},\\ 2, & x\ge\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

1.5. а) $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$; б) $f(x)=\begin{cases} x^2, & |x|<1,\\ 2, & |x|\ge 1\end{cases}$

1.6. а) $f(x)=arctg\dfrac{1}{x}$; б) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0,\\ 1-x, & 0\le x\le 2,\\ 2, & x>2\end{cases}$

1.7. а) $f(x)=\sqrt{x}\,arctg\dfrac{1}{x}$; б) $f(x)=\begin{cases} -2x, & x\le 0,\\ \sqrt{x}, & 0<x<4,\\ 3, & x\ge 4\end{cases}$

1.8. а) $f(x)=\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$; б) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0,\\ x, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2\end{cases}$

1.9. а) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$; б) $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{x-1}, & x>0\end{cases}$

1.10. а) $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{3^{x-2}}}{\dfrac{1}{3^{x-2}}+1}$; б) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{2}, & x\le 0,\\ \cos x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ x-\dfrac{\pi}{2}, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

1.11. а) $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; б) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x\le 0,\\ 2, & 0<x\le 2,\\ x, & x>2\end{cases}$

1.12. а) $f(x)=e^{\frac{x+1}{x}}$; б) $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le\pi,\\ x-2, & x>\pi\end{cases}$

1.13. а) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$; б) $f(x)=\begin{cases}2x, & x\le 0,\\ x^2+1, & 0<x\le 1,\\ 2, & x>1\end{cases}$

1.14. а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$; б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\le 1,\\ \operatorname{arctg} x, & x>1\end{cases}$

1.15. а) $f(x)=x\cdot\sin\dfrac{\pi}{x}$; б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x\le 4,\\ \sqrt{x-4}, & x>4\end{cases}$

1.16. а) $f(x)=\dfrac{x\ln(x+1)}{x-1}$; б) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x-2}, & x\le 4,\\ -\sqrt{x}, & x>4\end{cases}$

1.17. а) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x^2}$; б) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, & x\le 1,\\ 2^x, & x>1\end{cases}$

1.18. а) $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$; б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\le\dfrac{\pi}{2},\\ \sin x, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

1.19. а) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$; б) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, & x\le\dfrac{\pi}{2},\\ \cos x, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

1.20. а) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$; б) $f(x)=\begin{cases}3^{-x}, & x\le -1,\\ \dfrac{1}{x}, & x>-1\end{cases}$

1.21. а) $f(x)=1-x\cdot\sin\frac{1}{x}$; б) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x<1\\ \log_3 x, & x\geq 1\end{cases}$

1.22. а) $f(x)=3^{\frac{x}{4-x^2}}$; б) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1}, & x<1,\\ \log x, & x\geq 1\end{cases}$

1.23. а) $f(x)=\frac{1}{x}\sin x$; б) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x<0,\\ x, & 0<x\leq 2,\\ 3, & x>2\end{cases}$

1.24. а) $f(x)=\frac{e^{-x}-1}{x}$; б) $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2}, & x<1\\ 2x-1, & x\geq 1\end{cases}$

1.25. а) $f(x)=(x+1)\,arctg\frac{1}{x}$; б) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<1\\ \frac{1}{x}, & x\geq 1\end{cases}$

1.26. а) $f(x)=\frac{1}{x^2(x-1)}$; б) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x<1\\ x^2, & x\geq 1\end{cases}$

1.27. а) $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$; б) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+1}, & x<1\\ 2^x, & x\geq 1\end{cases}$

1.28. а) $f(x)=\frac{2+x}{4-x^2}$; б) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x<0,\\ \sin x, & x\geq 0\end{cases}$

1.29. а) $f(x)=x^2\cdot\sin\frac{1}{x}$; б) $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leq -1\\ \frac{1}{x+1}, & x>-1\end{cases}$

1.30. а) $f(x)=\frac{1}{e^{x-\frac{1}{x}}}$; б) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<1\\ 2^x+1, & x\geq 1\end{cases}$

Тема 2. Исследование функций с помощью производной и построение графиков.

Цель: Овладение практическими навыками полного исследования функции и построения графиков функции.

Схема проведения полного исследования функции. Возрастание и убывание функции, нахождение участков её монотонности. Стационарные и критические точки функции. Локальные экстремумы функции, условия их существования и нахождение. Глобальные экстремумы функции на отрезке, их нахождение. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба, условия их существования и нахождение. Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции, условия их существования и нахождение. Построение графика функции.

Литература: **[2]** –С.94-108; **[4]** – С.289-301; **[7]** – С.141-150.

Пример выполнения задания. Провести полное исследование функции

$y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}$ и построить её график.

Для построения графика функции $y=f(x)$ нужно:
1) *найти область определения функции;*
2) *найти область непрерывности функции и точки разрыва;*
3) *исследовать функцию на чётность, нечётность и периодичность;*
4) *найти точки пересечения графика с осями координат;*
5) *найти асимптоты графика функции;*
6) *найти интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции;*
7) *найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.*

Решение.

1) Находим область определения функции: $D(y)=\{x\in R\,|\,x^2+2x\neq 0\}$ = $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$.

2) Поскольку данная функция является элементарной, то областью её непрерывности является область определения $D(y)$, а точками разрыва являются точки $x=-2$ и $x=0$, не принадлежащие множеству $D(y)$, но являющиеся предельными точками этого множества (точками в любой окрестности которых содержатся точки данного множества). Исследуем характер разрыва в точках $x=-2$ и $x=0$, вычислив в них односторонние пределы функции:

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(-2)\cdot(-0)}=+\infty,\quad \lim_{x\to-2+0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(-2)\cdot(+0)}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to0-0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(-0)\cdot 2}=-\infty,\qquad \lim_{x\to0+0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(+0)\cdot 2}=+\infty.$$

Так как односторонние пределы функции в точках $x=-2$ и $x=0$ - бесконечные, то данные точки являются точками бесконечного разрыва.

3) Функция не является периодической.

Функция $y=f(x)$, в аналитическое выражение которой входит хотя бы одна непериодическая функция периодической не является.

Проверяем является ли функция чётной или нечётной. Так как область определения функции $D(y) = (-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$ не симметрична относительно точки $x=0$, то данная функция – общего вида.

4) Находим точки пересечения графика с осями координат.

Так как $x=0\notin D(y)$, то точек пересечения графика с осью Oy нет.

Положим $y=0$ и решим уравнение $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}=0$. Его решением является $x=-1$. Следовательно, точка $(-1,0)$ - точка пересечения графика с осью Ox.

5) Находим вертикальные и наклонные асимптоты графика функции.

Прямая $x=x_0$ является вертикальной асимптотой, тогда и только тогда, когда x_0 является точкой бесконечного разрыва функции $y=f(x)$.

Так как точки $x=-2$ и $x=0$ - точки бесконечного разрыва данной функции, то вертикальными асимптотами графика функции являются прямые $x=-2$ и $x=0$.

Прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to\pm\infty$ тогда и только тогда, когда одновременно существуют конечные пределы: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ *и* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b$.

Вычисляем сначала пределы при $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2}{(x^2+2x)x}=0=k_1,\quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_1x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=1=b_1.$$

В дальнейшем будем иметь в виду следующий часто встречающийся предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\begin{cases}\infty & \text{если } n>m\\ a_0/b_0 & \text{если } n=m\\ 0 & \text{если } n<m\end{cases}$

Следовательно $y=k_1x+b_1=0\cdot x+1$, т.е. $y=1$ - наклонная (горизонтальная) асимптота графика функции при $x\to-\infty$.

Аналогично вычисляем пределы при $x\to+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)^2}{(x^2+2x)x}=0=k_2$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-k_1x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}=1=b_2$ Следовательно $y=k_2x+b_2=0\cdot x+1$, т.е. $y=1$ - наклонная (горизонтальная) асимптота графика функции при $x\to+\infty$.

6) Определяем интервалы возрастания, убывания, экстремумы функции. Для этого находим первую производную функции:

$$y'=\left(\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}\right)'=\quad =\frac{\left((x+1)^2\right)'\cdot(x^2+2x)-(x+1)^2(x^2+2x)'}{(x^2+2x)^2}=$$

$$=\frac{2(x+1)(x^2+2x)-(x+1)^2(2x+2)}{(x^2+2x)^2}=-\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2}$$

и определяем критические точки функции $y=f(x)$, т.е. точки $x_i \in D(y)$ в которых $f'(x_i)=0$ или $f'(x_i)$ не существует:

$$y'=-\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2}=0 \Rightarrow \ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \in D(y);$$

y' не существует при $x^2+2x=0 \Rightarrow x=0 \notin D(y)$ и $x=-2 \notin D(y)$.

Таким образом, единственной критической (стационарной) точкой функции $y=f(x)$ является точка $x_1=-1$.

Исследуем знак производной $y'=f'(x)$ в интервалах, на которые критические точки функции $y=f(x)$ разбивают её область определения $D(y)$, и найдём интервалы возрастания, убывания, экстремумы функции. Результаты исследования представим следующей таблицей:

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
y'	+	+	0	–	–
y	возрастает	возрастает	0	убывает	убывает

Так как при переходе слева направо через точку $x=-1$ производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на « – », то точка $x=-1$ является точкой локального максимума и $y_{\max}=y(-1)=0$.

7) Определяем интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции. Для этого находим вторую производную функции:

$$y''=(y')'=\left(-\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2}\right)'=-2\left(\frac{(x+1)'(x^2+2x)^2-(x+1)((x^2+2x)^2)'}{(x^2+2x)^4}\right)=$$

$$=-2\left(\frac{1\cdot(x^2+2x)^2-(x+1)\cdot 2\cdot(x^2+2x)(2x+2)}{(x^2+2x)^4}\right)=\frac{2(3x^2+6x+4)}{(x^2+2x)^3}$$

и определяем точки возможного перегиба $y=f(x)$, т.е. точки $x_i \in D(y)$ в которых $f''(x_i)=0$ или $f''(x_i)$ не существует: $y''=\frac{2(3x^2+6x+4)}{(x^2+2x)^3}\neq 0$, так как $3x^2+6x+4\neq 0$ (квадратное уравнение не имеет действительных корней); y'' не существует при $x^2+2x=0 \Rightarrow x=0 \notin D(y)$ и $x=-2 \notin D(y)$.

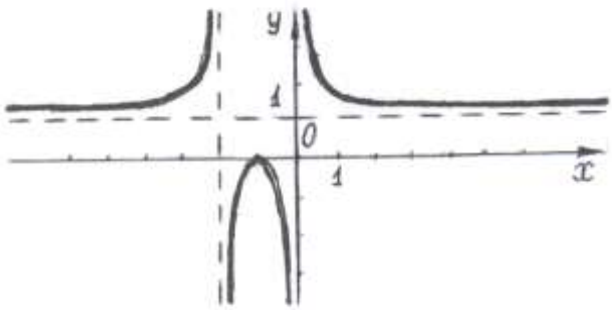
Таким образом, функция $y=f(x)$ не имеет точек возможного перегиба.

Исследуем знак второй производной $y''=f''(x)$ в интервалах, на которые точки возможного перегиба функции $y=f(x)$ разбивают её область определения $D(y)$, и найдём интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции. Результаты исследования представим таблицей:

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
y''	+	–	+
y	график вогнутый	график выпуклый	график вогнутый

Точек перегиба нет.

8) На основании полученных результатов строим график функции



Задание. Провести полное исследование функции $y = f(x)$ **и построить её график.**

2.1. $y=\dfrac{x^2-x-6}{x-2}$ **2.2.** $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$ **2.3.** $y=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$ **2.4.** $y=\dfrac{x}{x^2-4}$

2.5. **2.6.** $y=\dfrac{x^3}{x^4-1}$ **2.7.** $y=\dfrac{x^3-3x}{x^2-1}$ **2.8.** $y=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$

2.9. $y=\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$ **2.10**. $y=\dfrac{8}{x\cdot\sqrt{x^2-4}}$ **2.11.** $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ **2.12.** $y=x-x^3$

2.13. $y=2x^2+3x-1$ **2.14.** $y=x+\dfrac{1}{x}$ **2.15.** $y=\dfrac{1}{x^3+1}$ **2.16.** $y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$

2.17. $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ **2.18.** $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x^2}$ **2.19.** $y=\sqrt{4-2x^2}$ **2.20.** $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$

2.21. $y=x^3-3x^2+4$ **2.22.** $y=x^2+\dfrac{16}{x}-16$ **2.23.** $y=4-x-\dfrac{4}{x^2}$

2.**24.** $y=2\sqrt{x}-x$ **2.25.** $y=x^3-3x^2+6$ 2.2**6.** $y=1-\sqrt[3]{x^2-2x}$ **2.27.** $y=x^3-6x^2+6$ 2.2**8.** $y=x^3-3x^2+5$ **2.29.** $y=\dfrac{10x+10}{x^2+2x+2}$ **2.30.** $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$

Тема 3. Геометрический смысл определенного интеграла. Приложение интеграла к решению прикладных задач.

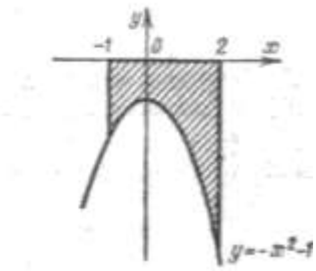
Цель: Овладение практическими навыками решения прикладных задач.

Геометрический смысл определенного интеграла. Приложения определенного интеграла: вычисление площадей фигур, объемов, длин дуги, площади поверхности вращения. Решение физических и технических задач: вычисление работы, производимой силой; вычисление пути, пройденного материальной точкой.

Литература: **[2]** –С.143-150; **[4]** – С.342-353; **[7]** –С.178-186.

<u>Пример выполнения задания.</u>

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2-1$, $y=0$, $x=-1$, $x = 2$



$$S = -\int_{-1}^{2}\left(-x^2-1\right)dx = \int_{-1}^{2}\left(x^2+1\right)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Big|_{-1}^{2} =$$

$$\left(\frac{1}{3} * 2^3 + 2\right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 - 1\right) = 6.$$

Ответ: S = 6 кв.ед.

2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v = (6t^2 + 2t)$ м/с, второе — со скоростью v = *(4t+5)* м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

Решение: очевидно, что искомая величина есть разность расстояний, пройденных первым и вторым телом за 5 с:

$$s_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t)dt = [2t^2 + t^2]_0^5 = 275\ (м), s_2 = \int_0^5 (4t+5)dt = [2t^2 + 5t]_0^5 = 75\ (м),$$

$$s_1 - s_2 = 275 - 75 = 200\ (м).$$

Задание 1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $y = x^3,\ y = 1,\ x = 2$	2) $y = \cos x,\ y = 0,\ x = -\frac{\pi}{4}$
3) $y = \sqrt{x},\ y = 2,\ x = 9$	4) $y = x^3,\ y = \sqrt{x}$
5) $y = \sin x,\ y = 0,\ x = -\frac{\pi}{4},\ x = -\frac{3\pi}{4}$	6) $y = \sqrt{x},\ y = \frac{1}{2}x$
7) $y = \frac{5}{x},\ y = 6 - x$	8) $y = \sin x,\ y = 0,\ x = \frac{\pi}{4},\ x = \frac{3\pi}{4}$
9) $y = x^4,\ y = x$	10) $y = x^2 + 4x + 4,\ x = 1,\ y = 0$
11) $y = (x-2)^2$ и осями координат	12) $y = \sqrt{x},\ y = \frac{1}{3}x$
13) $y = 3x^2,\ y = 0$ и прямой, проходящей через точки (-3; 0) и (-1; 3)	14) $y = 4x - x^2,\ x = 1,\ y = 0,\quad 1 \le x \le 4$
15) $y = x^2 + 1,\ y = 2$	16) $y = x^2 + 6x + 9,\ x = 0,\ y = 0$
17) $y = \cos x,\ y = 0,\ x = \frac{3\pi}{4},\ x = \frac{5\pi}{4}$	18) $y = (x+1)^2,\ y = 0,\ x = 0$ ответ округлить до десятых
19) $y = x^2 - 2x + 3,\ x = -1$ и касательной к графику в точке $x_0 = 2$	20) $y = x^3,\ y = x^2 + 2x$
21) $y = \frac{3}{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = e^2$	22) $y = 3 + 2x - x^2,\ x = 0$ и касательной к графику функции в точке $x_0 = 0$
23) $y = \frac{1}{x^2},\ y = 0,\ x = 0{,}5;\ x = 2{,}5$	24) $y = x^2 + 4,\ y = 4x,\ y = -4x$
25) $y = \frac{2}{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = e^3$	26) $y = 2x - x^2,\ y = \frac{3}{4}$
27) $y = \frac{1}{x^2},\ y = 0,\ x = 0{,}5;\ x = 2{,}5$	28) $y = x^2 - 4x,\ y = 0,\ x = 1,\quad 1 \le x \le 4$
29) $y = x^2,\ y = 3 - 2x^2$	

Задание 2. **[6]** –С.268-269 №№ 8.70-8.76, №№8.80-8.86.

Тема 4. Нахождение экстремумов функций многих переменных.

Цель: Формирование практических навыков нахождения экстремумов функции многих независимых переменных.

Частные производные. Дифференциал, его связь с частными производными. Геометрический смысл частных производных и дифференциала. Достаточное условие дифференцируемости. Градиент и производная по направлению. Необходимые и достаточные условия экстремума функции нескольких переменных.

Литература: **[2]** –С.173-193.

Задание 1

4.1.Найти производную функции $z = 2x^2 + 3xy + y^2$ в точке A(2;1) по направлению вектора $\vec{l} = (3;-4)$.

4.2. Найти производную функции $z = x^2 - xy + y^2$ в точке M(1;1) в направлении вектора $\vec{l} = (6;8)$.

4.3.Найти производную функции $z = \arcsin \frac{x^2}{y}$ в точке A(1;2) в направлении вектора $\vec{l} = (5;-12)$.

4.4. Найти величину и направление градиента функции $z = x^3 - 3xy + y^3$ в точке M(2;1).

4.5. Найти производную функции $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$ в точке M(1;2) в направлении вектора $\boldsymbol{MN}$, где N (5,5).

4.6. Найти производную функции $z = x^2 - xy - 2y^2$ в точке P(1;2) в направлении, составляющем с осью Ox угол 60°.

4.7. Найти производную функции $z = \left(x^2 + y\right)\sqrt{e^y}$ в точке M(2;0) в направлении вектора $\boldsymbol{MN}$, где N (5,4).

4.8. Найти величину и направление градиента функции $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ в точке M(5;3).

4.9. Найти производную функции $z = xy^2z^2$ в точке M(3;2;1) в направлении вектора $\boldsymbol{MN}$, где N (5;4;2).

4.10. Найти величину и направление градиента функции $z = xyz$ в точке M(2;1;1).

Задание 2. Исследуйте на экстремум функции:

4.1. $f = 5x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 4xy - 2yz.$

4.2. $f = 2x^2 + y^2 + 2xy - 10xz + 26z^2.$

4.3. $f = x^2 + 5y^2 - 2xy - 4xz + 2z^2.$

4.4. $f = 2x^2 + 5y^2 + 2xy - 2xz + z^2 - 4yz.$

4.5. $f = 5x^2 + y^2 + 6xt + 13t^2 + 4yt.$

4.6. $f = 2x^2 + y^2 + 2xy + 2t^2 + 2yt.$

4.7. $f = 2x^2 + 13y^2 - 10xy + 2z^2 + 2yz.$

4.8. $f = 5x^2 + 2y^2 - 4xy - 2xt + 2t^2 + 2yt.$

4.9. $f = 10x^2 + 9y^2 - 10xy.$

4.10. $f = 5x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 4xy - 2yz.$

Задание 3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции:

4.1. $z = x^2 + 3y^2 + x - 12y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 4;\ y = 3;\ x + y = 4.$

4.2. $z = x^2 + 3y^2 + x - 14y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = -2;\ y = 5,\ x + y = 6.$

4.3. $z = x^2 + 3y^2 + x - 15y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = -2;\ y = 6;\ x + y = 7.$

4.4 $z = x^2 + 3y^2 + x - 16y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = -2;\ y = 7;\ x + y = 8.$

4.5. $z = -2x^2 - y^2 - xy + 3$ в области D: $x \le 1;\ y \ge 0;\ y \le x.$

4.6 $z = x^2 + 3y^2 + x - 18y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = -2;\ y = 9,\ x + y = 10.$

4.7. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ в области D: $x \ge 0;\ y \ge 0;\ \mathrm{x} + y \le 3.$

4.8 $z = x^2 + 3y^2 + x - 11y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = -1;\ y = 1,\ x + y = 3.$

4.9. Найти экстремум функции $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в области D, где $x \le 1;\ y \le 1,\ x + y \ge 1.$

4.10 $z = x^2 + 3y^2 + x - 13y,$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = -1;\ y = 3,\ x + y = 5.$

Тема 5. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Цель: Формирование практических навыков решения задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

Типы задач, приводящие к дифференциальным уравнениям. Определение общего и частного решений дифференциальных уравнений, их геометрическая интерпретация. Методы решения дифференциальных уравнений.

Литература: **[4]** –С.381-383; **[5]** – С.241-253; **[7]** – С.187-199.

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$\frac{d^2y}{dx^2}$ + p $\frac{dy}{dx}$ + qy = 0 (1), где p, q – постоянные величины.

Для отыскания общего решения уравнения (1) составляется характеристическое уравнение r^2 + pr + q =0 (2), которое получается из уравнения (1) заменой $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ и у на соответствующие степени r, причем сама функция у заменяется единицей.

Тогда общее решение дифференциального уравнения (1) строится в зависимости от корней r_1 и r_2 характеристического уравнения(2). Здесь возможны три случая.

1 случай. Корни r_1 и r_2 - действительные и различные. В этом случае общее решение уравнения (1) имеет вид: $Y = C_1 e^{x_1} + C_2 e^{x_2}$

2 случай. Корни r_1 и r_2 - действительные и равные: $r_1 = r_2 = r$. В этом случае общее решение уравнения (1) имеет вид: $Y = (C_1 + C_2x)\, e^{x}$

3 случай. Корни r_1 и r_2 - комплексно-сопряженные: $r_1 = \alpha + \beta i$; $r_2 = \alpha - \beta i$. В этом случае общее решение уравнения (1) имеет вид: $Y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

Задания [7] –С.271 № 9.24-9.32

Тема 6. Дифференциальные уравнения в науке и технике.

Цель: Активизировать познания студентов. Познакомить студентов с широким спектром применения дифференциальных уравнений.

Составление дифференциальных уравнений. Дифференциальное уравнение показательного роста. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

Доп. литература: **[3] –С.345-351.**

Задание. Написать реферат или создать презентацию на тему «Дифференциальные уравнения в науке и технике».

Тема 7. Практическое применение степенных рядов.

Цель: Активизировать познания студентов. Познакомить студентов с широким спектром применения степенных рядов.

Вычисление значений функций. Вычисление определенных интегралов. Решение дифференциальных уравнений.

Доп. литература: **[3] –С.457-462.**

Задание. Написать реферат или создать презентацию на тему «Практическое применение степенных рядов».

Тема 8. Комплексные числа. Операции над комплексными числами. Формула Муавра. Решение уравнений.

Цель: Приобретение практических навыков выполнения различных операций над комплексными числами.

Различные формы записи комплексных чисел. Переход от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и показательной формам, и обратно. Действия над комплексными числами. Многочлены и алгебраические уравнения. Основная теорема алгебры. Теорема Безу. Формула Муавра.

Литература: **[4]** –С.484-499; **[5]** – С.309-318.

Пример выполнения задания.

1. Даны комплексные числа $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = 4 - 3i$.

Найти: а) $z_1 + 2z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}$; д) $\dfrac{z_1^2 - \bar{z}_2^2}{z_1 \cdot z_2}$.

Решение.

а) $z_1 + 2z_2 = (5+2i) + 2(4-3i) = 5 + 2i + 8 - 6i = 13 - 4i$.

б) $z_1 \cdot z_2 = (5+2i)(4-3i) = 20 - 15i + 8i - 6i^2 = 20 - 7i - 6(-1) =$

$= 26 - 7i$, так как $i^2 = -1$.

в) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{5+2i}{4-3i} = \dfrac{(5+2i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \dfrac{20 + 15i + 8i - 6}{16 + 9} =$

$= \dfrac{14 + 23i}{25} = \dfrac{14}{25} + \dfrac{23}{25} i = 0{,}56 + 0{,}92i$.

г) $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2} = \dfrac{(5+2i)(4-3i)}{(5+2i) + (4-3i)} = \dfrac{26 - 7i}{9 - i} = \dfrac{(26 - 7i)(9 + i)}{(9 - i)(9 + i)} =$

$= \dfrac{234 + 26i - 63i +}{81 + 1} = \dfrac{241 - 37i}{82} = \dfrac{241}{82} - \dfrac{37}{82} i$.

д) Для любого комплексного числа $z = x + iy$ существует сопряженное ему число $z = x - iy$.

$$\frac{z_1^2 - \bar{z}_2^2}{z_1 \cdot z_2} = \frac{(5+2i)^2 - (4+3i)^2}{(5+2i)(4-3i)} = \frac{(25 + 20i + 4i^2) - (16 + 24i + 9i^2)}{26 - 7i} =$$

$$= \frac{25 + 20i - 4 - 16 - 24i + 9}{26 - 7i} = \frac{(14 - 4i)(26 + 7i)}{(26 - 7i)(26 + 7i)} =$$

$$= \frac{364 + 98i - 104i + 28}{676 + 49} = \frac{392 - 6i}{725} = \frac{392}{725} - \frac{6}{725} i .$$

Ответ: $z_1 + 2z_2 = 13 - 4i$; $z_1 \cdot z_2 = 26 - 7i$; $\dfrac{z_1}{z_2} = 0{,}56 + 0{,}92i$; $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2} = \dfrac{241}{82} - \dfrac{37}{82} i$; $\dfrac{z_1^2 - z_2^2}{z_1 \cdot z_2} = \dfrac{392}{725} - \dfrac{6}{725} i$.

2. Применяя формулу Муавра, найти z^n, где $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $n = 12$.

Решение. Формула Муавра для любого комплексного числа $z = x + iy$ в тригонометрической форме имеет вид:

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$,

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, аргумент φ определяется из формул

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

$$\Rightarrow \varphi = \arg z = \arg\frac{y}{x}.$$

Для комплексного числа $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ имеем:

$$r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2; \qquad \varphi = arctg\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = arctg1 = \frac{\pi}{4}.$$

При $n = 12$ имеем:

$$z^{12} = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{12} = 2^{12}(\cos 12\cdot\frac{\pi}{4} + i\sin 12\cdot\frac{\pi}{4}) =$$

$$2^{12}(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 2^{12}(-1 + i\cdot 0) = -2^{12} = -4096.$$

<u>Ответ:</u> $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{12} = -4096.$

3. Решить уравнение $z^6 + 729 = 0.$

<u>Решение.</u>

Уравнение $z^n = a, \quad n \in N$ имеет n различных решений: $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, причем решения определяются формулами:

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}), \quad k = 0,1,\ldots,(n-1),$$

где $\varphi = \arg a.$

Для уравнения $z^6 = -729$ имеем

$$z_k = \sqrt[6]{-729} = \sqrt[6]{729}\cdot\sqrt[6]{-1} = 3\sqrt[6]{-1}, \quad k = 0,1,\ldots,5.$$

Для числа -1, $\varphi = \arg(-1) = \pi.$

Тогда

$$z_k = 3(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{6}), \quad k = 0,1,\ldots,5.$$

Подставляем вместо k последовательно значения 0,1,…,5, получим 6 различных решений уравнения:

$$z_0 = 3(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i;$$

$$z_1 = 3(\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}) = 3(0 + i) = 3i;$$

$$z_3 = 3(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i;$$

$$z_3 = 3(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i;$$

$$z_4 = 3(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}) = 3(0 - i) = -3i;$$

$$z_5 = 3(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i;$$

Ответ: $z_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i;\quad z_1 = 3i;\quad z_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i;\quad z_3 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i;\quad z_4 = -3i;\quad z_5 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i.$

Задание 1. Даны комплексные числа Z_1 и Z_2. Найти:

а) $Z_1 + 2Z_2$; **б)** $Z_1 \cdot Z_2$; **в)** $\frac{Z_1}{Z_2}$; **г)** $\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$; **д)** $\frac{Z_1^2 - \bar{Z}_2^2}{Z_1 \cdot \bar{Z}_2}$.

8.1. $Z_1 = 1+i,\quad Z_2 = 3-2i;$ **8.2.** $Z_1 = 1-i,\quad Z_2 = 5-i;$

8.3. $Z_1 = -1+i,\quad Z_2 = 2+3i;$ **8.4.** $Z_1 = -1-i,\quad Z_2 = 1+4i;$

8.5. $Z_1 = 2+i,\quad Z_2 = 1-3i;$ **8.6.** $Z_1 = 2-i,\quad Z_2 = 4+3i;$

8.7. $Z_1 = -2+i,\quad Z_2 = 5-2i;$ **8.8.** $Z_1 = -2-i,\quad Z_2 = 3+2i;$

8.9. $Z_1 = 2+3i,\quad Z_2 = 1-5i;$ **8.10.** $Z_1 = 2-3i,\quad Z_2 = 3+2i;$

8.11. $Z_1 = -2+3i,\quad Z_2 = 3-2i;$ **8.12.** $Z_1 = -2-3i,\quad Z_2 = -3+2i;$

8.13. $Z_1 = 3+i,\quad Z_2 = 2+5i;$ **8.14.** $Z_1 = 3-i,\quad Z_2 = 2-5i;$

8.15. $Z_1 = -3+i,\quad Z_2 = -2+5i;$ **8.16.** $Z_1 = -3-i,\quad Z_2 = -2+3i;$

8.17. $Z_1 = 3+2i,\quad Z_2 = -2-5i;$ **8.18.** $Z_1 = 3-2i,\quad Z_2 = 1+5i;$

8.19. $Z_1 = -3+2i,\quad Z_2 = 1-3i;$ **8.20.** $Z_1 = -3-2i,\quad Z_2 = 5-2i;$

8.21. $Z_1 = 3+4i,\quad Z_2 = 2+3i;$ **8.22.** $Z_1 = 3-4i,\quad Z_2 = -2+3i;$

8.23. $Z_1 = -3+4i,\quad Z_2 = 2-3i;$ **8.24.** $Z_1 = -3-4i,\quad Z_2 = 2+3i;$

8.25. $Z_1 = 4+3i,\quad Z_2 = 3+5i;$ **8.26.** $Z_1 = 3+5i,\quad Z_1 = 4-3i,$

8.27. $Z_1 = 4-3i,\quad Z_2 = 3-5i,$ **8.28.** $Z_1 = 3-5i,\quad Z_2 = 4+5i;$

8.29. $Z_1 = -4+3i,\quad Z_2 = -3+5i;$ **8.30.** $Z_1 = -4-3i,\quad Z_2 = 3+5i;$

Задание 2. Применяя формулу Муавра, найти Z^n.

8.1. $Z = 1+i,\quad n = 1$ **8.2.** $Z = 1-i,\quad n = 1$

8.3. $Z = -1+i,\quad n = 1$ **8.4.** $Z = -1-i,\quad n = 1$

8.5. $Z = \sqrt{3}+i,\quad n =$ [illegible] **8.6.** $Z = \sqrt{3}-i,\quad n = 1$

8.7. $Z = -\sqrt{3}+i,\quad n = 1$ **8.8.** $Z = -\sqrt{3}-i,\quad n = 1$

8.9. $Z = 1+\sqrt{3}i,\quad n =$ [illegible] **8.10.** $Z = 1-\sqrt{3}i,\quad n = 1$

8.11. $Z = -1+\sqrt{3}i,\quad n = 1$ **8.12.** $Z = -1-\sqrt{3}i,\quad n = 1$

8.13. $Z = 3+3i,\quad n = 1$ **8.14.** $Z = 3-3i,\quad n =$ [illegible]

8.15. $Z = -3+3i,\quad n = 1$ **8.16.** $Z = -3+3i,\quad n = 1$

8.17. $Z=-3-3i,\ n=1$ 8.18. $Z=2+2i,\ n=1$

8.19. $Z=2-2i,\ n=6$ 8.20. $Z=-2+2i,\ n=1$

8.21. $Z=-2-2i,\ n=1$ 8.22. $Z=4+4i,\ n=1$

8.23. $Z=4-4i,\ n=1$ 8.24. $Z=-4+4i,\ n=1$

8.25. $Z=-4-4i,\ n=2$ 8.26. $Z=5+5i,\ n=6$

8.27. $Z=5-5i,\ n=1$ 8.28. $Z=-5+5i,\ n=1$

8.29. $Z=-5-5i,\ n=1$ 8.30. $Z=-2+2i,\ n=1$

Задание 3. Решить уравнение.

8.1. $Z^4+16=0$ **8.2.** $Z^4-16=0$

8.3. $Z^5+32=0$ **8.4.** $Z^5-32=0$

8.5. $Z^6+1=0$ **8.6.** $Z^6-1=0$

8.7. $Z^5+1=0$ **8.8.** $Z^5-1=0$

8.9. $Z^6+64=0$ **8.10.** $Z^6-64=0$

8.11. $Z^4+81=0$ **8.12.** $Z^4-81=0$

8.13. $243Z^5+32=0$ **8.14.** $243Z^5-32=0$

8.15. $Z^4+4=0$ **8.16.** $Z^4-4=0$

8.17. $16Z^4+1=0$ **8.18.** $16Z^4-1=0$

8.19. $Z^5+243=0$ **8.20.** $Z^5-243=0$

8.21. $32Z^5+1=0$ **8.22.** $32Z^5-1=0$

8.23. $64Z^6+1=0$ **8.24.** $64Z^6-1=0$

8.25. $16Z^4+81=0$ **8.26.** $16Z^4-81=0$

8.27. $81Z^4+1=0$ **8.28.** $81Z^4-16=0$

8.29. $32Z^5-243=0$ **8.30.** $32Z^5+243=0$

Тема 9. Примеры вычисления вероятностей.

Цель: Овладение практическими навыками решения задач на вычисление вероятностей событий.

Случайные события и предмет теории вероятностей. Статистическое определение вероятности случайного события. Алгебра событий. Комбинаторное правило умножения. Размещения, перестановки и сочетания. Классический способ подсчета вероятностей. Правило сложения вероятностей. Условная вероятность. Независимые события и правило умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Литература: **[2]** –С.259-276; **[4]** – С.456-466; **[8]** – С.15-57.

Пример выполнения задания.

1. В группе 25 студентов, из них 10 юношей и 15 девушек. Какова вероятность того, что из вызванных наудачу трёх студентов: а) все три девушки, б) первые два юноши и одна девушка.

Решение: а) P=m/n. Число элементарных событий n= C_{25}^{3} . Число благоприятствующих событий m = $C_{10}^{0} \cdot C_{15}^{3}$. Тогда вероятность того, что из вызванных наудачу трёх студентов будут все три девушки равна

$$P = \frac{C_{10}^{0} \cdot C_{15}^{3}}{C_{25}^{3}} = \frac{10! \cdot 15! \cdot 22! \cdot 3!}{3! \cdot 10! \cdot 12! \cdot 3! \cdot 22!} = \frac{2730}{13800} = 0{,}198 .$$

б) P=m/n. Число элементарных событий n= C_{25}^{3} . Число благоприятствующих событий m = $C_{10}^{2} \cdot C_{15}^{1}$. Тогда вероятность того, что из вызванных наудачу трёх студентов будут два юноши и одна девушка равна

$$P = \frac{C_{10}^{2} \cdot C_{15}^{1}}{C_{25}^{3}} = \frac{10! \cdot 15! \cdot 22! \cdot 3!}{2! \cdot 8! \cdot 14! \cdot 1! \cdot 25!} = \frac{675}{2300} = 0{,}293 .$$

Ответ: а) 0,198; б) 0,293.

2. В первой бригаде производится в три раза больше продукции, чем во второй. Вероятность того, что производимая продукция окажется стандартной для первой бригады равна 0,7, для второй - 0,8. Определить вероятность того, что взятая наугад единица продукции будет стандартной. Какова вероятность того, что она произведена второй бригадой?

Решение: Событие А – «деталь будет стандартной», H_1 – «изготовлена в 1 бригаде», H_2 – «изготовлена во 2 бригаде». $P(H_1) = 0{,}75$; $P(H_2) = 0{,}25$; $P(A\backslash H_1) = 0{,}7$; $P(A\backslash H_2) = 0{,}8$. Следовательно, искомая вероятность $P(A) = 0{,}75 \cdot 0{,}7 + 0{,}25 \cdot 0{,}8 = = 0{,}525 + 0{,}2 = 0{,}725$.

Вероятность того, что стандартная деталь произведена второй бригадой:

$$P(H_1\backslash A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A\backslash H_2)}{P(H_1) \cdot P(A\backslash H_1) + P(H_2) \cdot P(A\backslash H_2)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}8}{0{,}75 \cdot 0{,}7 + 0{,}25 \cdot 0{,}8} = 0{,}276$$

Ответ: 0,725; 0,276.

3. В конверте 10 фотографий, среди которых две нужные. Извлечено 5 фотографий. Какова вероятность, что нужные две среди них?

Решение: Число элементарных событий определим C_{10}^{5} способами, т.е. 5 фото из 10 можно выбрать C_{10}^{5} способами $n = C_{10}^{5}$.

Число благоприятных исходов вычисляется следующим образом:

2 нужные фото из 2^{х} нужных можно выбрать $C_{2}^{2} = 1$ способами.

3 ненужные из 8 ненужных можно выбрать C_{8}^{3} способами.

Каждый выбор нужной фотографии может сочетаться с выбором ненужной.

Поэтому $m = C_2^2 \cdot C_8^3$

Искомую вероятность находим по классическому определению вероятности: $P = \frac{m}{n}$

m = (2! / 2! 0!) * (8! / 3! 5!) = 1 * 56 = 56

n = 10! / 5! 5! = 252

P = 56 / 252 = 2 / 9

Ответ: 2/9.

4. *Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности их отказа соответственно равны 0,2 и 0,3. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.*

Решение: Событие А – отказал $1^{\underline{ый}}$ элемент $P(A) = 0{,}2$.

Событие В – отказал $2^{\underline{ой}}$ элемент $P(B) = 0{,}3$.

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}8$ - не отказал $1^{\underline{ый}}$ элемент.

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0{,}7$ - не отказал $2^{\underline{ой}}$ элемент.

Вероятность того, что устройство не отказала, находим по теореме умножения

$P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$

Искомую вероятность находим как обратную к полученной:

$P = 1 - P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 1 - 0{,}56 = 0{,}44.$

Ответ: P=0,44.

5. *Нужная студенту книга с вероятностью 0,8 имеется в каждой из трёх библиотек А, В, С. Если в А книга не обнаружена, он идёт в В. Если в В книги нет, он идёт в С. Найти вероятность того, что студент книгу получит.*

Решение: $P(A) = 0{,}8$

$P_{\overline{A}}(B) = 0{,}8$ - вероятность того, что не найдя книгу в библиотеке *A*, найдет в *B*.

$P_{\overline{A},\overline{B}}(C) = 0{,}8$ - вероятность того, что не найдя книгу в библиотеке *A* и *B*, найдет в библиотеке *C*.

P (Ā) = 1 - P (A) = 0,2

искомую вероятность находим по формуле:

$$P = P(A) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{A},\overline{B}}(C)$$

$P = 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}992$

Ответ: P= 0,992

Задания

9.1. 1**.** При проведении конкурса «Мисс Академия» устанавливаются 5 главных призов. В финал вышли 25 студенток, среди которых 10 блондинок. Определить вероятность того, что среди обладателей призов окажутся две блондинки.

2. Два студента условились встретиться в определенном месте между 19 и 20 часами. Пришедший первым ждет другого в течение 20 минут, и в случае его неявки – немедленно уходит. Определить вероятность встречи, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прибытия в течение указанного часа.

3. При приемке партии подвергается проверке половина изделий. Условиями приемки допускается не более 2% бракованных изделий. Определить вероятность того, что партия из 100 изделий, содержащая 5% брака, будет принята.

4. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа не потребует внимания первый станок, равна 0,9, второй — 0,8, третий — 0,85. Найти вероятность, что в течение часа хотя бы один станок потребует внимания рабочего.

5. На трех автоматических станках изготовляются одинаковые детали. Известно, что 30 % деталей производится первым станком, 25 % — вторым и 45 % — третьим. Вероятность изготовления детали, отвечающей стандарту, на первом станке равна 0,99, на втором — 0,988 и на третьем — 0,98. Изготовленные на трех станках не рассортированные детали находятся на складе. Определить вероятность того, что взятая наугад деталь не соответствует стандарту.

9.2. 1. В урне 4 белых и 5 черных шаров. Из урны наугад вынимают два шара. Найти вероятность того, что один из шаров белый, а другой — черный.

2. На отрезке АВ, длина которого l, наугад ставятся две точки, которые этот отрезок делят на три части. Найти вероятность того, что из трех получившихся частей можно составить треугольник.

3. На десяти карточках написаны буквы А, А, А, М, М, Т, Т, Е, И, К. После тщательного перемешивания вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают их в том порядке, в каком они были вынуты. Найти вероятность того, что на карточках будет написано слово "математика".

4. На обувной фабрике в отдельных цехах производятся подметки, каблуки и верхи мужских ботинок одного размера и фасона. Дефектными оказываются 0,5 % каблуков, 2 % подметок и 4 % верхов. Произведенные

каблуки, подметки и верхи случайно комбинируются в цехе, где шьются ботинки. Найти вероятность того, что изготовленная пара ботинок будет содержать дефекты.

5. В группе из 20 стрелков имеется 4 отличных, 10 хороших и 6 посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для отличного стрелка равна 0,9, для хорошего — 0,7, для посредственного — 0,5. На линию огня случайно вызывается один стрелок. Найти вероятность того, что он поразит цель при первом выстреле.

9.3. 1. В 25 экзаменационных билетах содержится по два вопроса, которые не повторяются. Экзаменуемый знает ответы на 48 вопросов. Какова вероятность сдачи письменного экзамена, если для этого необходимо правильно ответить на оба вопроса?

2. Плоскость разлинована параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии 8 см. Определить вероятность того, что наугад брошенный на эту плоскость круг радиусом 3 см не пересечет ни одной линии.

3. На сборку механизма поступают детали с двух автоматов. Первый автомат в среднем дает 1,5 % брака, второй — 1 %. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 2000 деталей, а со второго — 1500.

4. Среди 1000 лотерейных билетов имеется два выигрыша по 50 руб., пять по 20 руб., десять по 10 руб., 25 по 5 руб. Некто покупает один билет. Найти вероятность выигрыша не менее 20 руб.

5. Известно, что 96 % выпускаемых заводом изделий отвечают стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную с вероятностью 0,05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, отвечает стандарту.

9.4. 1. Из партии, состоящей из 20 радиоприемников, для проверки произвольно отбирают три приемника. Партия содержит пять неисправных приемников. Какова вероятность того, что в число отобранных войдут один неисправный и два исправных приемника?

2. На отрезок AB длиной 12 см наугад "бросают" точку M. Какова вероятность того, что площадь квадрата, построенного на AM, будет больше 36 и меньше 81 см^2?

3. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. По мишени стреляют одиночными выстрелами до первого попадания, после чего

стрельбу прекращают. Найти вероятность того, что будет сделано не более трех выстрелов.

4. На предприятии брак составляет в среднем 1,5 % общего выпуска изделий. Из не бракованных изделий изделия первого сорта составляют 80 %. Какова вероятность того, что взятое наугад изделие окажется изделием первого сорта, если оно взято из общей массы изготовленной продукции?

5. Имеются две урны: в первой 3 белых шара и 2 черных; во второй — 4 белых и 4 черных. Из первой урны во вторую перекладывают два шара. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

9.5. 1. В мастерскую для ремонта поступило 15 телевизоров. Известно, что шесть из них нуждаются в общей регулировке. Мастер берет наудачу пять телевизоров. Какова вероятность того, что два из них нуждаются в общей регулировке?

2. Найти вероятность того, что сумма двух наугад взятых на отрезке [0,1] чисел не больше единицы, а произведение не больше 3/16.

3. Три орудия ведут огонь по цели, вероятность попадания в которую при одном выстреле из первого орудия — 0,5, из второго — 0,6, из третьего — 0,7. Зная, что каждое орудие стреляет один раз, найти вероятность поражения цели, если для этого необходимо не менее двух попаданий.

4. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово "книга". Ребенок перемешал буквы, а потом наугад их собрал. Какова вероятность того, что он опять составил слово "книга"?

5. С первого автомата на сборку поступает 40 %, со второго — 35 %, с третьего — 25 % деталей. Среди деталей первого автомата 0,2 % бракованных, второго — 0,3 %, с третьего — 0,5 %. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь бракованная.

9.6. 1. Среди претендентов в туристический полет в космос на станцию МКС на 4 места претендуют 4 женщины и 3 мужчин, прошедшие полный курс подготовки к полету. Какова вероятность того, что среди пассажиров космического корабля окажутся две женщины и двое мужчин?

2. Статистика показала, что вероятность выздоровления больного в результате применения нового способа лечения равна 0,8. Какова вероятность того, что количество вылечившихся больных будет не менее 75 из 100 лечившихся?

3. На пяти карточках написано по одной цифре из набора 1, 2, 3, 4 и 5. Наугад выбираются одна за другой две карточки. Какова вероятность того, что число на второй карточке больше, чем на первой?

4. В одном ящике 6 белых и 4 черных шарика, во втором — 7 белых и 3 черных. Из каждого ящика наугад вынимаются по одному шарику. Чему равна вероятность того, что оба шарика окажутся белыми?

5. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате равна 0,075, а на втором — 0,09. Производительность второго автомата вдвое больше, чем первого. Найти вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь нестандартная.

9.7. 1. В урне 4 белых и 4 черных шара. Из этой урны наудачу извлекли 5 шаров. Какова вероятность того, что 2 из них белые, а 3 — черные?

2. Найти вероятность того, что сумма двух наугад взятых на отрезке [0,1] чисел не больше единицы, а произведение не больше 3/16.

3. Три стрелка поочередно ведут стрельбу по одной и той же мишени. Каждый стрелок имеет два патрона. При первом же попадании стрельба прекращается. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,2, для второго — 0,3, для третьего — 0,4. Найти вероятность того, что все три стрелка израсходуют весь свой боезапас.

4. На первом этаже семиэтажного дома в лифт зашли 3 человека. Вероятность выхода из лифта каждого человека на любом этаже одинакова. Найти вероятность того, что все трое выйдут из лифта на 4 этаже.

5. В цехе работает 20 станков. Из них 10 марки А, 6 марки В и 4 марки С. Вероятность того, что качество детали окажется отличным, для этих станков соответственно равна 0,9; 0,8; 0,7. Какой процент отличных деталей выпускает цех в целом?

9.8. 1. В урне 10 шаров, из которых 2 белых, 3 черных и 5 синих. Наудачу извлечены 3 шара. Какова вероятность того, что все шары разного цвета?

2. Расстояние от пункта А до пункта В автобус проходит за 2 минуты, а пешеход — за 15 минут. Интервал движения автобусов — 25 минут. Вы подходите в случайный момент времени к пункту А и отправляетесь в В пешком. Найти вероятность того, что в пути Вас догонит очередной автобус.

3. Истребитель атакует бомбардировщик и дает по нему две независимые очереди. Вероятность сбить бомбардировщик первой очередью равна 0,2, второй —0,3. Если бомбардировщик не сбит, он ведет по истребителю стрельбу из орудий кормовой установки и сбивает его с вероятностью 0,25. Найти вероятность того, что в результате воздушного боя будет сбит бомбардировщик или истребитель.

4. Три стрелка производят по одному выстрелу по цели, вероятности попадания в которую равны: для первого стрелка — 0,6, для второго — 0,7, для третьего — 0,8. Найти вероятность ровно одного попадания в цель.

5. Приборы одного наименования изготовляются на трех заводах. Первый завод поставляет 45 % всех изделий, поступающих на производство, второй — 30 %, третий — 25 %. Надежность прибора, изготовленного на первом заводе, равна 0,8, на втором —0,85 и на третьем — 0,9. Определить полную надежность прибора, поступившего на производство.

9.9. 1. В партии из 10 деталей имеются 4 бракованные. Какова вероятность того, что среди наудачу отобранных 5 деталей окажутся 2 бракованные?

2. Найти вероятность того, что сумма двух наугад взятых на отрезке [0,1] чисел не больше единицы, а произведение не больше 3/16.

3. Из колоды в 32 карты наугад одна за другой вынимаются две карты. Найти вероятность того, что вынуты валет и дама.

4. В ящике 7 белых и 9 черных шариков. Наугад вынимают один шарик, фиксируют его цвет и кладут обратно в ящик. После чего шары перемешивают. Затем опять вынимают один шарик. Какова вероятность того, что оба шарика белые?

5. В студенческом стройотряде 2 бригады первокурсников и одна — второкурсников. В каждой бригаде первокурсников 5 юношей и 3 девушки, а в бригаде второкурсников 4 юношей и 4 девушки. По жеребьевке из отряда выбрали одну из бригад и из нее одного человека для поездки в город. Какова вероятность того, что выбран юноша?

9.10. 1. В ящике 8 красных и 10 белых шариков. Одновременно наугад вынимаются 2 шарика. Какова вероятность того, что они разных цветов?

2. Стержень длины "а" наудачу разломан на три части. Найти вероятность того, что длина каждой части окажется больше а/4.

3. Из пяти карточек с буквами А, Б, В, Г, Д наугад одна за другой выбираются три и располагаются в ряд в порядке появления. Какова вероятность того, что получится слово "два"?

4. При наборе телефонного номера абонент забыл две последних цифры и набрал их наудачу, помня только, что эти цифры нечетные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

5. При помещении в урну тщательно перемешанных 10 шаров (6 белых и 4 черных) один шар неизвестного цвета потерялся. Из оставшихся 9 шаров наудачу вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется белым?

9.11. 1. Из партии, в которой 30 деталей без дефекта и 5 с дефектами, берут наудачу 3 детали. Найти вероятность того, по крайней мере одна деталь без дефекта.

2. Найти вероятность того, что сумма наудачу взятых двух чисел из отрезка $[-1; 1]$ больше нуля, а их произведение отрицательно.

3. Ребенок играет с четырьмя буквами разрезной азбуки А, А, М, М. Какова вероятность того, при случайном расположении букв в ряд он получит слово "мама"?

4. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 2, либо 5, либо тому и другому одновременно.

5. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне — 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

9.12. 1. Владелец одной карточки лотереи "Спортлото" (в которой нужно угадать 6 чисел из 49) зачеркивает 6 номеров. Какова вероятность того, что им будет угадано 5 номеров в очередном тираже?

2. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Времена прихода судов к причалу случайны и независимы. Найти вероятность того, что одному из пароходов придется ждать освобождения причала, если время стоянки первого парохода 1 ч, а второго — 2 ч.

3. На 30 одинаковых жетонах написаны 30 двузначных чисел от 11 до 40. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешаны. Какова вероятность вынуть жетон с номером, кратным 3 или 2?

4. Произведен залп из двух орудий по мишени. Вероятность попадания первым орудием равна 0,85, вторым — 0,91. Найти вероятность поражения цели, если для этого достаточно хотя бы одного попадания.

5. Рабочий обслуживает 3 станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02, для второго — 0,03, для третьего — 0,04. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в три раза больше, чем второго, а третьего — в два раза меньше, чем второго. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной.

9.13. 1. В лотерее выпущено 20 билетов, 10 из которых выигрывают. Гражданин купил 5 билетов. Какова вероятность того, что по крайней мере один из купленных билетов выигрышный?

2. Вероятность того, что покупателю требуется костюм 50 размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 100 покупателей потребуют костюм 50 размера 25 человек.

3. В денежно-вещевой лотерее на 1000 билетов приходится 24 денежных и 10 вещевых выигрышей. Некто приобрел два билета. Какова вероятность выигрыша хотя бы одного билета?

4. На десяти карточках написаны цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Две из них вынимают наугад и укладывают в порядке появления, затем читают полученное число. Найти вероятность того, что число будет нечетным.

5. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,3 % брака, второй — 0,2 % и третий — 0,4 %. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 1000, со второго — 2000 и с третьего — 2500 деталей.

9.14. 1. Партия из 10 деталей проверяется контролером, который наугад отбирает 3 детали и определяет их качество. Если среди выбранных контролером деталей нет ни одной бракованной, то вся партия принимается; в противном случае она посылается на дополнительную проверку. Какова вероятность того, что партия деталей, содержащая 4 бракованные детали, будет принята контролером?

2. Игральную кость бросают 180 раз. Сколько раз, вероятнее всего, выпадет шесть очков? Найти вероятность этого события.

3. В одном ящике 5 белых и 10 красных шаров, в другом — 10 белых и 5 красных шаров. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут один белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

4. Для повышения надежности (вероятности безотказной работы) центрального блока, вероятность безотказной работы которого в течение заданного времени равна 0,85, устанавливается такой же резервный блок. При выходе из строя центрального блока происходит мгновенное переключение на резервный блок. Определить надежность дублирующих друг друга блоков.

5. Для контроля продукции из трех партий деталей взята одна деталь. Как велика вероятность обнаружения бракованной продукции, если в одной партии 1/3 деталей бракованные, а в двух других все доброкачественные.

9.15. 1. В ящике лежат 10 деталей 1 сорта и 5 деталей второго сорта. Наудачу вынимают три детали. Чему равна вероятность того, что хотя бы одна из деталей первого сорта?

2. Вероятность наступления события А в каждом опыте равна 0,25. Найти наивероятнейшее число наступлений события А в 192 опытах и вероятность этого события.

3. В денежно-вещевой лотерее на 1000 билетов приходится 24 денежных и 10 вещевых выигрышей. Некто приобрел два билета. Какова вероятность выигрыша хотя бы одного билета?

4. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,8, а для второго — 0,6. Стрелки независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один из стрелков?

5. В 3 урнах содержатся белые и черные шары. В первой — 2 белых и 3 черных шара, во второй — 2 белых и 2 черных шара, в третьей — 3 белых и 1 черный шар. Из первой урны положили шар во вторую. После этого шар из второй урны переложили в третью. Наконец, из третьей урны шар переложили в первую. Определить вероятность того, что во всех урнах состав шаров по их цветам останется без изменений.

Тема 10. Случайная величина.

Закон распределения случайной величины.

Цель: Овладение практическими навыками решения задач на вычисление вероятностей событий.

Выборка. Выборочные распределения. Вариационный ряд. Числовые характеристики выборки. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия. Статистические оценки.

Литература: **[2]** –С.293-339; **[8]** – С.102-130, 181-197.

Пример выполнения задания. *В урне 6 белых и 4 чёрных шара. Из неё извлекают 3 шара. X — число белых шаров среди извлечённых.*

Найти: а) ряд распределения X; б) функцию распределения F(x), в ответе записать значения F(0,2), F(2,5); в) m_x*; г)* D_x*; д)* $P(0{,}2 < X < 2{,}5)$.

Решение:

а) Случайная величина X может принимать значения *0, 1, 2, 3*.

Вероятности этих значений:

$$P_{x=0} = \frac{C_6^0 \cdot C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{6!\cdot 4!\cdot 7!\cdot 3!}{6!\cdot 0!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 10!} = \frac{1}{30}$$

$$P_{x=1} = \frac{C_6^1 \cdot C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{6!\cdot 4!\cdot 7!\cdot 3!}{5!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 10!} = \frac{3}{10}$$

$$P_{x=2} = \frac{C_6^2 \cdot C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{6!\cdot 4!\cdot 7!\cdot 3!}{4!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 10!} = \frac{1}{2}$$

$$P_{x=3} = \frac{C_6^3 \cdot C_4^0}{C_{10}^3} = \frac{6!\cdot 4!\cdot 7!\cdot 3!}{3!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 0!\cdot 10!} = \frac{1}{6}$$

Ряд распределения X:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

б)
$$F(X)=\begin{cases}0 & \text{если} \quad x \le 0\\ \frac{1}{30} & \text{если} \quad 0\langle x \le 1\\ \frac{1}{3} & \text{если} \quad 1\langle x \le 2\\ \frac{5}{6} & \text{если} \quad 2\langle x \le 3\\ 1 & \text{если} \quad x\rangle 3\end{cases}$$

F(x) – функция распределения *x*.

$F(0{,}2)=\frac{1}{30}$ $\qquad F(2{,}5)=\frac{5}{6}$

в) $m_x = x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4$

$m_x = 0\cdot\frac{1}{30} + 1\cdot\frac{3}{10} + 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{6} = 1{,}8$ =9/5

г) $D_x = M\left(x^2\right) - \left(M(x)\right)^2$

$D_x = \left(0^2\cdot\frac{1}{30} + 1^2\cdot\frac{3}{10} + 2^2\cdot\frac{1}{2} + 3^2\cdot\frac{1}{6}\right) - (1{,}8)^2 = 3{,}8 - 3{,}24 = 0{,}56$ = 14/25

д) $P(0{,}2\langle x\langle 2{,}5) = F(2{,}5) - F(0{,}2)$

$P(0{,}2\langle x\langle 2{,}5) = \frac{5}{6} - \frac{1}{30} = \frac{4}{5}$

Задания [7] – С.275-278

10.1. №№10.32, 10.43
10.2. №№10.40-10.48
10.3. №№10.33-10.44
10.4. №№10.41-10.49
10.5. №№10.34-10.45
10.6. №№10.42-10.50
10.7. №№10.35-10.46
10.8. №№10.38-10.50
10.9. №№10.36-10.47
10.10. №№10.37-10.50
10.11. №№10.37-10.48
10.12. №№10.32-10.50
10.13. №№10.38-10.49
10.14. №№10.35-10.50
10.15. №№10.39-10.50

Тема11. Дифференциальное исчисление функции одного аргумента. Применение производной к исследованию функции.

Вопрос № 1.

Указать, чему равно приращение функции $y = x^2$ в точке $x_0 = 3$, соответствующее приращению аргумента $\Delta x = 0{,}1$:

а) 0,61; б) 0,39; в) 0,01; г) 0,03.

Вопрос № 2.

Указать, чему равно приращение функции $y = x^3$ в точке $x_0 = 2$, соответствующее приращению аргумента $\Delta x = 0{,}1$:

а) 0,261; б) 0,41; в) 0,001; г) 0,002.

Вопрос № 3.

Указать, чему равно приращение функции $y = x^4$ в точке $x_0 = 1$, соответствующее приращению аргумента $\Delta x = 0{,}1$:

а) 0,1; б) 0,01; в) 0,001; г) 0,0001.

Вопрос № 4.

Из данных утверждений выбрать то, которое является верным:

а) функция дифференцируема в точке тогда и только тогда, когда непрерывна в ней; б) если функция непрерывна в точке, то она дифференцируема в ней; в) если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в ней; г) функция непрерывна в точке тогда и только тогда, когда дифференцируема в ней.

Вопрос № 5.

Из данных утверждений выбрать то, которое является верным:

а) функция дифференцируема в точке тогда и только тогда, когда непрерывна в ней; б) если функция имеет разрыв в точке, то она не дифференцируема в ней; в) если функция не дифференцируема в точке, то она в ней имеет разрыв; г) функция непрерывна в точке тогда и только тогда, когда дифференцируема в ней.

Вопрос № 6.

Из данных утверждений выбрать то, которое является верным:

а) если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в ней; б) если функция определена в точке, то она дифференцируема в ней; в) если функция не дифференцируема в точке, то она в ней имеет разрыв; г) функция непрерывна в точке тогда и только тогда, когда дифференцируема в ней.

Вопрос № 7.

Производная функции $y = e^{x^2}$ равна:

а) $y' = e^{x^2}$; б) $y' = 2e^{x^2}$; в) $y' = 2xe^{x^2}$; г) $y' = 2xe^{x}$.

Вопрос № 8.

Производная функции $y = \ln x^2$ равна:

а) $y' = \frac{1}{x^2}$; б) $y' = \frac{1}{2x}$; в) $y' = \frac{2}{x}$; г) $y' = \frac{2}{x^2}$.

Вопрос № 9.

Производная функции $y = \ln^2 x$ равна:

а) $y' = \frac{1}{x^2}$; б) $y' = 2\ln x$; в) $y' = \frac{2\ln x}{x}$; г) $y' = \frac{\ln x}{2x}$.

Вопрос № 10.

Производная функции $y = \sin x^2$ равна:

а) $y' = 2\sin x \cos x$; б) $y' = 2x\sin x$; в) $y' = 2x + \cos x^2$; г) $y' = 2x\cos x^2$.

Вопрос № 11.

Производная функции $y = \sin^2 x$ равна:

а) $y' = 2\sin x$; б) $y' = 2\sin x$; в) $y' = 2\cos x$; г) $y' = \cos^2 x$.

Вопрос № 12.

Производная функции $y = \cos^2 x$ равна:

а) $y' = 2\cos x$; б) $y' = -2\sin x$; в) $y' = -\sin^2 x$; г) $y' = -\sin 2x$.

Вопрос № 13.

Вторая производная функции $y = -\frac{1}{x}$ равна:

а) $y'' = -\frac{1}{x^4}$; б) $y'' = -\frac{6}{x^4}$; в) $y'' = -\frac{3}{x^4}$; г) $y'' = \frac{1}{x^4}$.

Вопрос № 14.

Вторая производная функции $y = \frac{1}{e^x}$ равна:

а) $y'' = -\frac{1}{e^{2x}}$; б) $y'' = \frac{1}{e^{x}}$; в) $y'' = -\frac{1}{e^{x}}$; г) $y'' = -\frac{2}{e^{x}}$.

Вопрос № 15.

Вторая производная функции $y = \sin 2x$ равна:

а) $y'' = 4\sin 2x$; б) $y'' = -4\cos 2x$; в) $y'' = -2\sin 2x$; г) $y'' = -4\sin 2x$.

Вопрос № 16.

Вторая производная функции $y = \ln 2x$ равна:

а) $y'' = -\frac{1}{x^2}$; б) $y'' = -\frac{2}{x^2}$; в) $y'' = \frac{1}{x^2}$; г) $y'' = \frac{1}{2x^2}$.

Вопрос № 17.

Вторая производная функции $y = 2^x$ равна:

а) $y'' = 2^x \ln 2$; б) $y'' = 2 \cdot 2^x \ln 2$; в) $y'' = 2^x \ln^2 2$; г) $y'' = 2^x \ln 4$.

Вопрос № 18.

Вторая производная функции $y = (x-5)^2$ равна:

а) $y'' = 2$; б) $y'' = 2x$; в) $y'' = -2$; г) $y'' = -10$.

Вопрос № 19.

Материальная точка движется по следующему закону, выражающему зависимость пути от времени: $s(t) = 3t^2 - 4t - 2$. Какова будет мгновенная скорость этой точки в момент времени $t_0 = 2$.

а) 2; б) 4; в) 8; г) 0.

Вопрос № 20.

Материальная точка движется по следующему закону, выражающему зависимость пути от времени: $s(t) = -2t^2 + 4t - 2$. Какова будет мгновенная скорость этой точки в момент времени $t_0 = 1$.

а) 1; б) 0; в) 2; г) 4.

Вопрос № 21.

Материальная точка движется по следующему закону, выражающему зависимость пути от времени: $s(t) = -t^2 + 6t - 2$. Какова будет мгновенная скорость этой точки в момент времени $t_0 = 3$.

а) 0; б) 1; в) 2; г) 4.

Вопрос № 22.

Материальная точка движется по следующему закону, выражающему зависимость пути от времени: $s(t) = -2t^2 + 4t - 2$. Каково будет ускорение этой точки в момент времени $t_0 = 1$.

а) 0; б) 1; в) 2; г) -4.

Вопрос № 23.

Материальная точка движется по следующему закону, выражающему зависимость пути от времени: $s(t) = 2t^3 + t - 2$. Каково будет ускорение этой точки в момент времени $t_0 = 1$.

а) 0; б) 12; в) 4; г) 6.

Вопрос № 24.

Материальная точка движется по следующему закону, выражающему зависимость пути от времени: $s(t) = -t^3 + 2t^2 - 2t$. Каково будет ускорение этой точки в момент времени $t_0 = 1$.

а) -4; б) -3; в) -2; г) 0.

Вопрос № 25.

Известно, что для некоторой функции на интервале $(0;\infty)$ установлены следующие свойства: $y > 0, y' > 0, y'' > 0$. Какая из перечисленных элементарных функций удовлетворяет всем этим условиям:

а) $y = x^3$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = \frac{1}{x}$; г) $y = \ln x$.

Вопрос № 26.

Известно, что для некоторой функции на интервале $(0;\infty)$ установлены следующие свойства: $y > 0, y' > 0, y'' < 0$. Какая из перечисленных элементарных функций удовлетворяет всем этим условиям:

а) $y = x^3$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = \frac{1}{x}$; г) $y = \ln x$.

Вопрос № 27.

Известно, что для некоторой функции на интервале $(0;\infty)$ установлены следующие свойства: $y > 0, y' < 0, y'' > 0$. Какая из перечисленных элементарных функций удовлетворяет всем этим условиям:

а) $y = x^3$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = \dfrac{1}{x}$; г) $y = \ln x$.

Вопрос № 28.

Указать, чему равно наибольшее значение функции $y = \sqrt{x^2 - 1}$ на отрезке $[1;3]$:

а) $2\sqrt{2}$; б) $\sqrt{2}$; в) 4; г) 8.

Вопрос № 29.

Указать, чему равно наибольшее значение функции $y = \dfrac{1}{x^2}$ на отрезке $[1;3]$:

а) 1; б) 3; в) 4; г) 6.

Вопрос № 30.

Указать, чему равно наибольшее значение функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right]$:

а) 0; б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; в) 1; г) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ключ к тесту «Дифференциальное исчисление функции одного аргумента. Применение производной к исследованию функции»

Вопрос	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Ответ	а	а	г	в	б	а	в	в	в	г	б	г	б	б	г	а	в	а	в	б	а	г	б	в	а	б	в	а	а	в

Тема12. Интегральное исчисление функции одного аргумента.

Вопрос № 1.

Укажите среди перечисленных утверждений то, которое соответствует истине:

а) если функция имеет первообразную на некотором интервале, то она непрерывна на нём; б) если функция непрерывна на некотором интервале, то она имеет первообразную на нём; в) если функция дифференцируема на некотором интервале, то её первообразная выражается в элементарных функциях; г) если функция определена на всём данном интервале, то она интегрируема на нём.

Вопрос № 2.

Укажите среди перечисленных утверждений то, которое соответствует истине: а) если функция монотонна на некотором интервале, то она интегрируема на нём; б) если функция дифференцируема на некотором интервале, то она имеет на нём первообразную; в) если функция дифференцируема на некотором интервале, то её первообразная выражается в элементарных функциях; г) если функция определена на всём данном интервале, то она интегрируема на нём.

Вопрос № 3.

Укажите среди перечисленных утверждений то, которое соответствует истине: а) если функция непрерывна внутри некоторого отрезка, то она интегрируема на этом отрезке; б) б) если функция дифференцируема на некотором интервале, то она имеет на нём первообразную; в) если функция дифференцируема на некотором интервале, то её первообразная выражается в элементарных функциях; г) если функция непрерывна на всём данном интервале, то она интегрируема на этом интервале.

Вопрос № 4.

Первообразной для функции $y=\dfrac{1}{x}$ на интервале $(-\infty;0)$ является функция:

а) $y=\ln(-x)$; б) $y=\ln x$; в) $y=\ln|x|$; г) ни одна из перечисленных функций.

Вопрос № 5.

Первообразной для функции $y = \frac{1}{-x}$ на интервале $(-\infty; 0)$ является функция:

а) $y = \ln(-x)$; б) $y = \ln x$; в) $y = \ln|x|$; г) ни одна из перечисленных функций.

Вопрос № 6.

Первообразной для функции $y = \frac{1}{x}$ на интервале $(0; +\infty)$ является функция:

а) $y = \ln(-x)$; б) $y = \ln x$; в) $y = \ln|x|$; г) ни одна из перечисленных функций.

Вопрос № 7.

Функция $y = \sqrt{x}$ является первообразной для функции $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на интервале:

а) $(-\infty; \infty)$; б) $[0; \infty)$; в) $(0; \infty)$; г) ни на одном из перечисленных интервалов.

Вопрос № 8.

Функция $y = -\frac{1}{x}$ является первообразной для функции $y = \frac{1}{x^2}$ на интервале:

а) $(-\infty; \infty)$; б) $[0; \infty)$; в) $(0; \infty)$; г) ни на одном из перечисленных интервалов.

Вопрос № 9.

Функция $y = \frac{1}{x}$ является первообразной для функции $y = \frac{1}{x^2}$ на интервале:

а) $(-\infty; \infty)$; б) $[0; \infty)$; в) $(0; \infty)$; г) ни на одном из перечисленных интервалов.

Вопрос № 10.

Укажите среди перечисленных вариантов ответа общий вид первообразных функции $y = \frac{1}{2}\sin 2x$:

а) $y = -\frac{1}{4}\cos 2x + C$; б) $y = -\frac{1}{4}\cos x + C$; в) $y = \frac{1}{4}\cos x + C$; г) $y = \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

Вопрос № 11.

Укажите среди перечисленных вариантов ответа общий вид первообразных функции $y=\frac{1}{2}\cos 2x$:

а) $y=-\frac{1}{4}\sin 2x+C$; б) $y=-\frac{1}{4}\sin x+C$; в) $y=\frac{1}{4}\sin x+C$; г) $y=\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

Вопрос № 12.

Укажите среди перечисленных вариантов ответа общий вид первообразных функции $y=\frac{1}{2}e^{-2x}$:

а) $y=-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$; б) $y=\frac{1}{4}e^{-2x}+C$; в) $y=-\frac{1}{4}e^{-x}+C$; г) $y=\frac{1}{2}e^{-2x}+C$.

Вопрос № 13.

Неопределённый интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ равен:

а) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$; б) $\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$; в) $3\sqrt[3]{x}$; г) $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$.

Вопрос № 14.

Неопределённый интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ равен:

а) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $\frac{2}{\sqrt{x}}$; в) $2\sqrt{x}$; г) $-\frac{2}{\sqrt{x}}$.

Вопрос № 15.

Неопределённый интеграл $\int\sqrt[3]{x^2}\,dx$ равен:

а) $\frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5}$; б) $\frac{3\sqrt[5]{x^3}}{5}$; в) $-\frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5}$; г) $\frac{5\sqrt[3]{x^5}}{3}$.

Вопрос № 16

Неопределённый интеграл $\int 3^{3x}dx$ равен:

а) $\frac{3^{3x}\ln 3}{3}$; б) $\frac{3\cdot 3^{3x}}{\ln 3}$; в) $\frac{3^{3x}}{3\ln 3}$; г) $3^{3x+1}\cdot\ln 3$.

Вопрос № 17.

Неопределённый интеграл $\int e^{-x^2/2}dx$ равен:

а) $-2x^2e^{-x^2/2}$; б) $-2x\cdot e^{-x^2/2}$; в) $-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2/2}$; г) не выражается в элементарных функциях.

Вопрос № 18.

Неопределённый интеграл $\int x\cdot e^x dx$ равен:

а) $x\cdot e^x+e^x$; б) $x\cdot e^x-x$; в) $\boldsymbol{x\cdot e^x e^x}$; г) $x\cdot e^x-e^x$.

Вопрос № 19.

Неопределённый интеграл $\int \ln x\,dx$ равен:

а) $x\ln x-x$; б) $x\ln x+x$; в) $x\ln x-\ln x$; г) $x\ln x$.

Вопрос № 20.

Неопределённый интеграл $\int x\sin x\,dx$ равен:

а) $-x\cos x$; б) $-x\cos x+\sin x$; в) $-x\cos x-\sin x$; г) $x\cos x+\sin x$.

Вопрос № 21.

Неопределённый интеграл $\int \sin 2x\cos x\,dx$ равен:

а) $2\cos^2 x-\sin^2 2x$; б) $2\sin^2 2x\cos^2 x$; в) $\frac{1}{3}\sin^3 2x$; г) $-\frac{2}{3}\cos^3 x$.

Вопрос № 22.

Выберите среди перечисленных ниже вариантов ответа на поставленный вопрос правильный вариант. “Значение определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ зависит от …”:

а) … способа разбиения отрезка $[a;b]$; б) … длины частичных отрезков Δx_i ; в) … выбора точек c_i в каждом отрезке; г) … длины отрезка интегрирования.

Вопрос № 23.

Выберите среди перечисленных ниже вариантов ответа на поставленный вопрос правильный вариант. “Значение определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ зависит от …”: а) … подынтегральной функции; б) …

длины частичных отрезков Δx_i; в) … выбора точек c_i в каждом отрезке; г) … способа разбиения отрезка $[a;b]$.

Вопрос № 24.

Выберите среди перечисленных ниже вариантов ответа на поставленный вопрос правильный вариант. “Значение определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ зависит от …”: а) …знака подынтегральной функции; б) … длины частичных отрезков Δx_i; в) … выбора точек c_i в каждом отрезке; г) … способа разбиения отрезка $[a;b]$.

Вопрос № 25.

Определённый интеграл $\int_{-1}^{1} x^2 dx$ равен:

а) 0; б) $-\frac{2}{3}$; в) $\frac{2}{3}$; г) 1.

Вопрос № 26.

Определённый интеграл $\int_{-1}^{1} x^3 dx$ равен:

а) 0; б) $-\frac{2}{3}$; в) $\frac{2}{3}$; г) 1.

Вопрос № 27.

Определённый интеграл $\int_{-1}^{1} \sin x\, dx$ равен:

а) 0; б) $-\frac{2}{3}$; в) $\frac{2}{3}$; г) 1.

Вопрос № 28.

Среди предложенных вариантов ответа выберите значение площади фигуры, ограниченной линиями $y = 0, x = 0, y = \cos x$:

а) 0; б) $\frac{\pi}{2}$; в) 1; г) π.

Вопрос № 29.

Среди предложенных вариантов ответа выберите значение площади фигуры, ограниченной линиями $y=0, x=0, x=\frac{\pi}{2}, y=\sin x$:

а) 0; б) $\frac{\pi}{2}$; в) 1; г) π.

Вопрос № 30.

Среди предложенных вариантов ответа выберите значение площади фигуры, ограниченной линиями $x=-\frac{\pi}{3}, x=\frac{\pi}{3}, y=\sin x$:

а) 0; б) $\frac{\pi}{2}$; в) 1; г) π.

Ключ к тесту

«Интегральное исчисление функции одного аргумента»

Вопрос	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Ответ	б	б	г	а	б	б	в	в	г	а	г	а	в	г	а

Вопрос	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Ответ	в	г	г	а	б	г	г	а	а	в	а	а	в	в	в

Тема 13. Дифференциальное и интегральное исчисление функции двух (нескольких) переменных.

Вопрос № 1

Из перечисленных вариантов ответа выберите правильный вариант. Область определения функции двух переменных $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ это:

а) все точки координатной плоскости; б) все точки координатной плоскости, кроме точки (0; 0); в) все точки координатной плоскости, кроме точек, лежащих на прямой $y = -x$; г) все точки координатной плоскости, кроме точек, лежащих на окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Вопрос № 2

Из перечисленных вариантов ответа выберите правильный вариант. Область определения функции двух переменных $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$ это:

а) все точки координатной плоскости; б) все точки координатной плоскости, кроме точки (0; 0); в) все точки координатной плоскости, кроме точек, лежащих на прямой $y = -x$; г) все точки координатной плоскости, кроме точек, лежащих на окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Вопрос № 3

Из перечисленных вариантов ответа выберите правильный вариант. Область определения функции двух переменных $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$ это:

а) все точки координатной плоскости; б) все точки координатной плоскости, кроме точки (0; 0); в) все точки координатной плоскости, кроме точек, лежащих на прямой $y = -x$; г) все точки координатной плоскости, кроме точек, лежащих на окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Вопрос № 4

Из перечисленных вариантов ответа выберите правильный вариант. Область определения функции двух переменных $z = \dfrac{1}{x + y}$ - это:

а) все точки координатной плоскости; б) все точки координатной плоскости, кроме точки (0; 0); в) все точки координатной плоскости, кроме точек, лежащих на прямой $y = -x$; г) все точки координатной плоскости, кроме точек, лежащих на окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Вопрос № 5

Из перечисленных ниже вариантов ответа выберите правильный вариант. Область изменения (значений) функции двух переменных $z = x^2 + y^2$ равна:

а) R; б) $(0;\infty)$; в) $[0;\infty)$; г) $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.

Вопрос № 6

Из перечисленных ниже вариантов ответа выберите правильный вариант. Область изменения (значений) функции двух переменных $z = x + y^2$ равна:

а) R; б) $(0;\infty)$; в) $[0;\infty)$; г) $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.

Вопрос № 7

Из перечисленных ниже вариантов ответа выберите правильный вариант. Область изменения (значений) функции двух переменных $z = \frac{1}{x} + y^2$ равна:

а) R; б) $(0;\infty)$; в) $[0;\infty)$; г) $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.

Вопрос № 8

Из перечисленных ниже вариантов ответа выберите правильный вариант. Область изменения (значений) функции двух переменных $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ равна:

а) R; б) $(0;\infty)$; в) $[0;\infty)$; г) $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.

Вопрос № 9

Среди перечисленных ниже утверждений выберите то, которое не является истинным:

а) “если точка P является граничной точкой области, то в любой её окрестности есть точки, не принадлежащие этой области”; б) “если точка P является граничной точкой области, то в любой её окрестности есть точки, принадлежащие этой области”; в) “если точка P является граничной точкой области, то в любой её окрестность есть точки, как не принадлежащие, так и принадлежащие этой области”; г) “если в любой окрестности точки P есть точки, не принадлежащие этой области, то точка P является граничной точкой области”.

Вопрос № 10.

Среди перечисленных ниже утверждений выберите то, которое не является истинным:

а) “если точка P является граничной точкой области, то в любой её окрестности есть точки, не принадлежащие этой области”; б) “если точка P является граничной точкой области, то в любой её окрестности есть точки, принадлежащие этой области”; в) “если точка P является граничной точкой области, то в любой её окрестность есть точки, как не принадлежащие, так и принадлежащие этой области”; г) “если в любой окрестности точки P есть точки, принадлежащие этой области, то точка P является граничной точкой области”.

Вопрос № 11.

Среди перечисленных ниже утверждений выберите то, которое является истинным:

а) “если точка P является внутренней точкой области, то в любой её окрестности есть точки, не принадлежащие этой области”; б) “если точка P является внутренней точкой области, то можно указать её окрестность, содержащую только точки, принадлежащие этой области”; в) “если точка P является внутренней точкой области, то в любой её окрестность есть точки, как не принадлежащие, так и принадлежащие этой области”; г) “если в любой окрестности точки P есть точки, не принадлежащие этой области, то точка P является внутренней точкой области ”.

Вопрос № 12.

Среди перечисленных ниже утверждений выберите то, которое является истинным:

а) “если точка P является внутренней точкой области, то в любой её окрестности есть точки, принадлежащие этой области”; б) “если точка P является внутренней точкой области, то можно указать её окрестность, содержащую только точки, не принадлежащие этой области”; в) “если точка P является внутренней точкой области, то в любой её окрестность есть точки, как не принадлежащие, так и принадлежащие этой области”; г) “если в любой окрестности точки P есть точки, не принадлежащие этой области, то точка P является внутренней точкой области ”.

Вопрос № 13.

Частная производная первого порядка по x функции двух переменных $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ равна:

а) $z'_x = \dfrac{2x}{(x^2 + y^2)}$; б) $z'_x = -\dfrac{2x}{(x^2 + y^2)}$; в) $z'_x = -\dfrac{2y}{(x^2 + y^2)}$; г) $z'_x = \dfrac{2y}{(x^2 + y^2)}$.

Вопрос № 14.

Частная производная первого порядка по y функции двух переменных $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ равна:

а) $z'_y = \dfrac{2x}{(x^2 + y^2)}$; б) $z'_y = -\dfrac{2x}{(x^2 + y^2)}$; в) $z'_y = -\dfrac{2y}{(x^2 + y^2)}$; г) $z'_y = \dfrac{2y}{(x^2 + y^2)}$.

Вопрос № 15.

Частная производная первого порядка по x функции двух переменных $z = e^{xy}$ равна:

а) $z'_x = ye^{xy}$; б) $z'_x = -ye^{xy}$; в) $z'_x = xe^{xy}$; г) $z'_x = -xe^{xy}$.

Вопрос № 16.

Частная производная первого порядка по y функции двух переменных $z = e^{xy}$ равна:

а) $z'_y = ye^{xy}$; б) $z'_y = -ye^{xy}$; в) $z'_y = xe^{xy}$; г) $z'_y = -xe^{xy}$.

Вопрос № 17.

Частная производная первого порядка по x функции двух переменных $z = \ln xy$ равна:

а) $z'_x = \frac{x}{y}$; б) $z'_x = \frac{y}{x}$; в) $z'_x = \frac{1}{y}$; г) $z'_x = \frac{1}{x}$.

Вопрос № 18.

Частная производная первого порядка по x функции двух переменных $z = \ln xy$ равна:

а) $z'_y = \frac{x}{y}$; б) $z'_y = \frac{y}{x}$; в) $z'_y = \frac{1}{y}$; г) $z'_y = \frac{1}{x}$.

Вопрос № 19.

Частная производная первого порядка по x функции трёх переменных $w = \ln(xyz)$ равна:

а) $w'_x = \frac{1}{x}$; б) $w'_x = \frac{1}{y}$; в) $w'_x = \frac{1}{z}$; г) $w'_x = \frac{1}{xyz}$.

Вопрос № 20.

Частная производная первого порядка по y функции трёх переменных $w = \ln(xyz)$ равна:

а) $w'_y = \frac{1}{x}$; б) $w'_y = \frac{1}{y}$; в) $w'_y = \frac{1}{z}$; г) $w'_y = \frac{1}{xyz}$.

Вопрос № 21.

Частная производная первого порядка по z функции трёх переменных $w = \ln(xyz)$ равна:

а) $w'_z = \frac{1}{x}$; б) $w'_z = \frac{1}{y}$; в) $w'_z = \frac{1}{z}$; г) $w'_z = \frac{1}{xyz}$.

Вопрос № 22.

Частная производная второго порядка по x функции двух переменных $z = \sin xy$ равна:

а) $z''_{xx} = -2y\sin xy$; б) $z''_{xx} = -2x\sin xy$; в) $z''_{xx} = -x^2\sin xy$; г) $z''_{xx} = -y^2\sin xy$.

Вопрос № 23.

Частная производная второго порядка по y функции двух переменных $z = \sin xy$ равна:

а) $z''_{yy} = -2x\sin xy$; б) $z''_{yy} = -2y\sin xy$; в) $z''_{yy} = -x^2 \sin xy$; г) $z''_{yy} = -y^2 \sin xy$.

Вопрос № 24.

Частная производная второго порядка по x функции двух переменных $z = \ln xy$ равна:

а) $z''_{xx} = -\frac{1}{xy}$; б) $z''_{xx} = \frac{1}{xy}$; в) $z''_{xx} = -\frac{1}{x^2}$; г) $z''_{xx} = -\frac{1}{y^2}$.

Вопрос № 25.

Частная производная второго порядка по y функции двух переменных $z = \ln xy$ равна:

а) $z''_{yy} = -\frac{1}{xy}$; б) $z''_{yy} = \frac{1}{xy}$; в) $z''_{yy} = -\frac{1}{x^2}$; г) $z''_{yy} = -\frac{1}{y^2}$.

Вопрос № 26.

Смешанные частные производные второго порядка функции $z = x^2 y^3$ равны:

а) $z''_{xy} = 6xy^2$; б) $z''_{xy} = 12xy$; в) $z''_{xy} = 6xy$; г) $z''_{xy} = 6x^2 y^2$.

Вопрос № 27.

Смешанные частные производные второго порядка функции $z = x^3 y^2$ равны:

а) $z''_{xy} = 6xy^2$; б) $z''_{xy} = 12xy$; в) $z''_{xy} = 6x^2 y$; г) $z''_{xy} = 6x^2 y^2$.

Вопрос № 28.

Градиент функции $z = x^2 + y^2$ в точке $P_0(1;1)$ равен:

а) $grad\, z = 2\vec{i} + 2\vec{j}$; б) $grad\, z = 2\vec{i} - 2\vec{j}$; в) $grad\, z = \vec{i} + 2\vec{j}$; г) $grad\, z = 2\vec{i} + \vec{j}$.

Вопрос № 29.

Градиент функции $z = x^3 + y^3$ в точке $P_0(1;1)$ равен:

а) $grad\, z = 2\vec{i} + 3\vec{j}$; б) $grad\, z = 6\vec{i} - 6\vec{j}$; в) $grad\, z = 3i + 3\vec{j}$; г) $grad\, z = 2\vec{i} + \vec{j}$.

Вопрос № 30.

Градиент функции $z = x^2 + y^3$ в точке $P_0(1;1)$ равен:

а) $grad\, z = 2\vec{i} + 2\vec{j}$; б) $grad\, z = 2\vec{i} - 2\vec{j}$; в) $grad\, z = 2\vec{i} + 3\vec{j}$; г) $grad\, z = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

Ключ к тесту «Дифференциальное и интегральное исчисление функции двух (нескольких) переменных»

Вопрос	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Ответ	б	а	г	в	в	а	г	б	г	г	б	а	б	в	а

Вопрос	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Ответ	в	г	в	а	б	в	г	в	в	г	а	в	а	в	в

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основные источники:

1. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике. [Текст]: учебное пособие. – 7-е изд. / Н.В. Богомолов. М.: Высшая школа, 2004 г.- 495 с.
2. Михеев, В.С.,. Математика. [Текст]: учебное пособие. / В.С.Михеев. Ростов-на-Дону: Феникс, 2009 г. – 504 с.
3. Пехлецкий, И.Д. Математика: учебник для студ. образоват. учреждений сред.проф. образования. [Текст]: учебное пособие. / И.Д. Пехлецкий. М.: Издательский центр «Академия», 2008 г. – 287 с.
4. Омельченко, В.П. Математика [Текст]: учебное пособие. / В.П. Омельченко, Э.В. Курбатова. – 2-е изд., перераб. И доп. – Ростов н/Д: Феникс, 2007 г. – 356 с.
5. Филимонова, Е.В. Математика [Текст]: учебное пособие. – 2-е изд., доп. и перераб. / Е.В. Филимонова. Ростов-на- Дону.: Феникс, 2008. – 486 с.

Дополнительные источники:

1. Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей [Текст]: учебное пособие. / Е.С Вентцель, М.: Издательский центр «Академия», 2005 г. – 342 с.

2. Крамор, В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. [Текст]: учебное пособие / В.С. Крамор, М.: ООО «Издательство Оникс, 2008 г. - 147 с.